Bilgisayar Ortamında Fibonacci Sayısal Yarıgrupların İncelenmesi

Abdullah Baykal, Sedat İlhan
Dicle Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü,
baykal.abdullah@gmail.com, sedati@dicle.edu.tr

Özet: Bu çalışmada, C programı yardımıyla belli bir aralıkta oluşturulan, Fibonacci sayılarından oluşturulan üreteçlerle elde edilen sayısal yarıgrupların sayısı ve bunların simetrik yada pseudo-simetrilikleri, çeşitli özelikleri incelenmektedir.

Anahtar Sözcükler: Sayısal Yarıgrup, Fibonacci Sayısı, simetrik, pseudo-simetrik

The Computer Analysis of Fibonacci Numerical Semigroups

Abstract: In this study, it is investigated the numbers of numerical semigroups which generated with triply-Fibonacci numbers in a certain interval by the C program, and their symmetrical or pseudo- symmetrical and various characteristics.

Keywords: Numerical Semigroup, Frobenius number, Symmetric,Pseudo-Symmetric.

1. Giriş

$\mathbb{N}$ negatif olmayan tam sayılar cümlesi ve $S \subseteq \mathbb{N}$ olsun. S, $\mathbb{N}$ deki toplama işlemine göre kapalı, birleşmeli ve $0 \in S$ oluyorsa S'ye bir *sayısal grup (numerical semigroup*) denir. Bir S sayısal yarıgrubu,

$0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_k$ olacak şekilde

$$S =< s_1, s_2, \ldots, s_k >= \left\{ \sum_{i=1}^{k} n_i s_i : n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \right\}$$

yazılır ki burada

" $obeb\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} = 1 \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus S$ sonludur" önermesi doğrudur([1]).

$F_0 = 0, F_1 = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ şeklinde tanımlanan F_n sayısına Fibonacci sayıları denir ve bu sayı dizisi $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ şeklinde yazılır. Eğer $S =< s_1, s_2, \ldots, s_k >$ ifadesinde s_i sayılarının her biri Fibonacci sayısı ise S 'ye Fibonacci Sayısal yarıgrubu denir ([4]).

2. Temel Bilgiler

S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, S 'de olmayan en büyük tam sayıya S sayısal yarıgrubunun *Frobenius sayısı* denir ve $g(S)$ ile gösterilir. S bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ onun Frobenius sayısı olmak üzere, her $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $g(S) - x \notin S$ oluyorsa S 'ye *simetrik sayısal yarıgrup* denir. Eğer $g(S)$ çift ve $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $x = \frac{g(S)}{2}$ ve $g(S) - x \notin S$ oluyorsa S 'ye *pseudo-simetrik sayısal yarıgrup* di-

yeceğiz ([3]). Özel olarak, $S =< n_1, n_2 >$ şeklinde iki elemanla üretilen her S sayısal yarıgrubunun simetrik olduğu ve onun Frobenius sayısının da $g(S) = n_1.n_2 - n_1 - n_2$ olduğu bilinmektedir ([2]).

Öte yandan, ardışık üç Fibonacci sayısı ile üretilen sayısal yarıgrup,

$$< F_n, F_{n+1}, F_{n+2} >=< F_n, F_{n+1} >$$

olduğundan daima simetriktir.

Bu çalışmada, $1 \le n \le 20$ için elde edilen $\binom{n}{3} - (n-2)$ tane Fibonacci sayı üçlüsü ile Fibonacci sayısal yarıgrupları oluşturulmakta ve bunların özellikleri incelenmektedir. Örneğin, $n=20$ için 517 tanesi Simetrik, S=<3,8,13>, S=<5,13,34>, S=<5,21,34> ve $S =< 13, 89, 610 >$ şeklinde 4 tanesi Pseudo-Simetrik ve 144 tane de ne Simetrik ne de pseudo-simetrik olan toplam 665 tane sayısal yarıgrup elde edilmektedir ki burada 0,1,1 haricindeki Fibonacci sayıların 17'sinden 3 tanesi ardışık olmayacak şekilde 3 erli sayı üreteçleri oluşturulmuştur.

3. Bu çalışma için hazırlanan C programı:

Fibonacci üçlü sayı üreteçlerini elde edebilmek için aşağıda verilen 20 adet fibonacci sayıları oluşturulmuş, bu sayılardan üçü de ardı ardına gelmeyecek şekilde elde edilen 665 adet sayı üçlüsü , u[1000][3] şeklindeki bir matrise aktarılmış bu matris elemanlarından üretilen sayı gruplarının özellikleri(simetrik, pseudo-simetrik) yukarıda verilen formüller kullanılarak hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar incelenmiştir.

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
0	1	1	2	3	5	8	13

F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}
21	34	55	89	144	233	377

F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}
610	987	1597	2584	4181

4. Örnekler

Yukarıdaki çalışmalara birkaç örnek verelim:

Örnek 1. $F_{3=}2$, F_{10}=55 , F_{11}= 89 Fibonacci sayıları ile üretilen $S =< 2, 55, 89 >$ Fibonacci sayısal yarıgrubu ,

S={0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 ...}

şeklinde olup S simetrik bir sayısal yarıgruptur.

Örnek 2. $F_{4=}3$, F_6= 8 , F_7= 13 Fibonacci sayıları ile üretilen $S =< 3, 8, 13 >$ Fibonacci sayısal yarıgrubu aşağıdaki gibi olup,

S Pseudo –Simetrik bir sayısal yarıgruptur.

S={0 3 6 8 9 11 ...}

Örnek 3. F_7=13 , $F_{9=}34$, F_{10}= 55 Fibonacci sayıları ile üretilen S=<13,34,55> Fibonacci sayısal yarıgrubu ,

S={0 13 26 34 39 47 52 55 60 65 68 73 78 81 86 89 91 94 99 102 104 107 110 112 115 117 120 123 125 128 130 133 136 138 141 143 144 146 149 151 154 156 157 159 162 164 165 167 169 170 172 175 177 178 180 182 183 185 188 190 191 193 195 196 198 199 201 203 204 206 208 209 211 212 214 216 217 219 220 221 222

224 225 227 229 230 232 233 234 235 237 238 240 242 243 245 246 247 248 250 251 253 254 255 256 258 259 260 261 263 264 266 267 268 269 271 272 273 274 275 276 277 279 280 281 282 284 285 286 287 288 289 290 292 293 294 295 297 298 299 300 301 302 303 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 318 ...}

şeklinde olup S ne simetrik ne de Pseudo-Simetrik bir sayısal yarıgruptur.

5. Program Kodundan Bazı Bölümler

```
// Fibonacci Sayı Dizisi Oluşturma
f[0]=0;
f[1]=1;
printf("%2d%2d",f[0],f[1]);
for (i=2; i<20; i++) {
f[i]=f[i-1]+f[i-2];
printf("%5d",f[i]);
}
printf("\n--------------------------
--------\n");
//
//Fibonacci Sayılarından üçerli
üreteç üretilmesi
//
for (k=1; k<15; k++)
for (i=3; i<20; i++)
for (j=2; i+j<20-k; j++) {
u[m][0]=f[i];
u[m][1]=f[i+j];
u[m][2]=f[i+j+k];
m++;
}
for (i=3; i<20; i++)
for (j=3; i+j<20; j++) {
u[m][0]=f[i];
u[m][1]=f[i+1];
u[m][2]=f[i+j];
m++;
}
//
// Elde edilen Üreteçlerin 100 li
gruplar haline //Yazdırılması
//
//for (i=0; i<m; i++){
//printf("%3d-%4d %4d %4d\n", i,u[i]
[0] ,u[i][1], u[i][2]);
//if (i%100==0) getch();}
printf("\nm=%4d\n",m); //üreteç
toplam sayısı
getch();
//
//Elde edilen üreteçlerin eşitlik
kontrolü
//
//for (i=0; i<m; i++)
//for (j=i+1; j<m-1; j++){
//if (u[i][0]==u[j][0] && u[i]
[1]==u[j][1] && u[i][2]==u[j][2])
//}
//
// Üreteçlerin sayısal yarıgrup
hesaplamaları
//
```

6. Sonuç

Bu çalışma, Sayısal yarıgruplarda özellikle Fibonacci sayısal yarıgruplarındaki araştırmalara ışık tutacağını düşünmekteyiz. Çünkü, Simetrik Fibonacci sayısal yarıgrupların elde edilmesi ve özelliklerin incelenmesi çeşitli kaynaklarda mevcuttur, ancak Pseudo-Simetrik Fibonacci sayısal yarıgrupların oluşturulması henüz hiçbir kaynakta yer almamaktadır ki bunların oluşturulması oldukça zor ve uzun çalışmalar sonucunda mümkündür. Bu yüzden, hazırladığımız bilgisayar programının bu konudaki eksikliği giderebileceği kansındayız.

7. Kaynaklar

[1] V.Barucci, D.E. Dobbs and M.Fontana , *Maximality Properties in Numerical Semigroups and Applications to One-Dimensional Analytically Irreducible Local Domains*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., vol. 598, (1997).

[2] R.Fröberg, C.Gottlieb and R.Haggkvist;, *On Numerical Semigroups*, Semigroup Forum, vol. 35, 63-83, (1987).

[3] J.C. Rosales , *One half of a pseudo-symmetric numerical semigroup*, London Math. Soc. , doi: 1112/blms/bd010,(2008).

[4] Rüveyde Kiper, Fibonacci Sayısal Yarıgrupları, (Yüksek Lisans Tezi) Haziran 2008.

[5] S. İlhan, A. Baykal and A. Kaya, Some Applications of Computational Semigroups, International Journal of Information Science and Computer Mathematics, Vol.1, No.1, 49-57, 2010.