

# Tavsiyeler ile Değişen Bellek Modeline Reklamın Etkisi

Uzay Cetin<sup>1,2</sup> and Haluk O. Bingol<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Bogazici Üniversitesi

<sup>2</sup>Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, İstanbul Gelişim Üniversitesi

Tavsiyeler ile değişen bir bellek yayılım modeli sosyal benzetim yoluyla incelenmiş ve bulgular analitik olarak, Markov Süreci kullanılarak, doğrulanmıştır. Model, iki farklı bilgi yayılım çeşidini göz önüne almıştır: tanıdıklar vasıtasıyla gelen tavsiyeler ve medya aracılığıyla kişilere ulaşacak reklamlar. Reklam yatırımını temsil eden model parametresini arttırmının reklamın bilinirliğine olumlu yansıtıldığı görülmüştür. Toplumsal hafızanın zayıf olduğu durumda, reklamın etkisinin beklenenden çok daha güçlü olduğu ortaya çıkmıştır. Hafıza büyüklüğü olabilecek en küçük değer olan bir iken, reklam edilen toplumda istisnasız herkes tarafından bilinir hale gelmiştir. İlginçtir ki, reklamın bu başarısı reklam yatırımından bağımsızdır.

## I. GİRİŞ

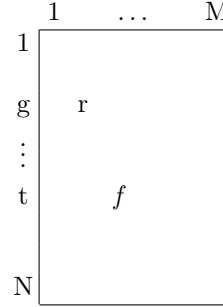
Gazete, televizyon gibi ortamlar bilinirlikte önemli rol oynar. Bunlara son zamanlarda sosyal ağlar da katılmıştır. Toplum tarafından bilinir olmak tercih edilen bir özelliktir. Şirketler ürünlerinin bilinirliğini sağlamak için büyük bütçeleri reklama ayırırlar. Politikacılar popüler olmak için ellerinden geleni yaparlar. Eğlence dünyası önemli ölçüde popülerlik üzerine kuruludur. Politik fikirler, eğer geniş kitleler tarafından kabul görürse, hükümetleri değiştirebilir.

Bilinirlikte ana etmen bireylerin etkileşmesidir. Bireyler birbirlerini etkilerler. Bu çalışmada bu etkileşimin nasıl olduğu bir model ile incelenmiştir. Basit Tavsiye Modeli (SRM) bir bireyin bir başka bireye bildiği birini tavsiye etmesini modeller [2]. Bireylerin sonlu belleği olduğu varsayımı altında birey kendisine tavsiye edilen bütün bireyleri hatırlayamaz, bazılarını unutmak zorundadır. Bu sınırlamanın sonucu olarak az sayıda birey çok bilinir hale gelirken, toplumun önemli bir kesimi gittikçe az bilinir olur. Bu durum tavsiye sayıları arttıkça daha belirgin hale gelir. Toplumun önemli bir çoğunluğu tarafından bilinir hale gelme, şöhretin oluşumu olarak da düşünülebilir. Çok temel bir model olan SRM modeli bir çok açıdan geliştirilmeye elverişlidir.

Gladwell'e göre, [5] “fikirler, ürünler, mesajlar ve davranışlar gibi bir çok şey, virüsler gibi yayılma özelliğine sahiptir”. Dolayısıyla moda, trend ve bilinirlik ile ilgili dinamikleri anlamının en iyi yolunun, epidemik modelleme olacağını savunur. Hastalık yayılım modelleme, fikir oluşumunu anlamak için önemli bir araçtır [10]. Bu kapsamda bir çok model geliştirilmiştir [1, 3, 6, 11]. Bu bildiri de, bahsi geçen SRM modeline reklamın etkisini benzetim yoluyla inceledikten sonra ve epidemik hastalık yayılım modellerinden birini kullanarak analitik bir çözümleme yapmaya çalışacağız.

## II. BASİT TAVSİYE MODELİ

Basit tavsiye mekanizması bireyin belleğinin modellenmesi ile başlar. En temel hali ile model şartıtcı dere-

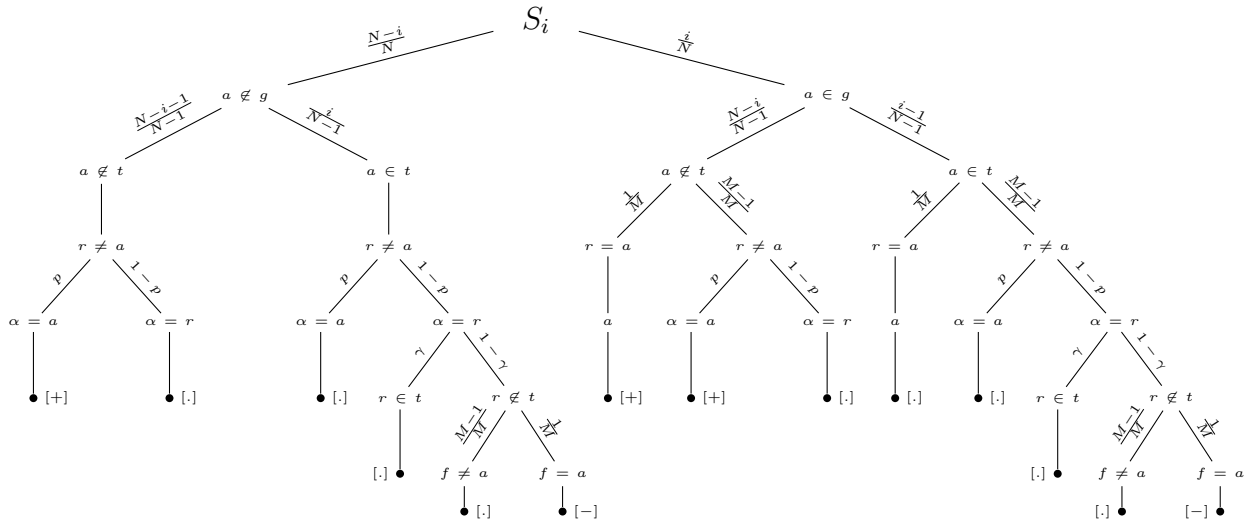


Şekil 1: Sistem genel olarak bir  $N \times M$  matris olarak düşünülebilir. Satırlar bireylerin bellek içeriklerini gösterir. Bireyin durumu, bireye ait bellek içeriğidir. Sistemin durumu ise, bireylerin bellek durumlarıdır.

cede basittir. Toplum  $N$  bireyden meydana gelmektedir. Her birey eşit büyüklükte,  $M$ , sabit bir belleğe sahiptir. Birey bir başka bireye kendi bildikleri arasında bir şeyi “tavsiye” eder. Burda tavsiye edilen, kültürel ürünler olarak düşünülmelidir [7]. Tavsiyeyi alan, yeni bir “şey” “öğrendiğinde”, bunu koymak için belleğinde boş bir yer bulması gerekir. Eğer boş yer yoksa bir şeyi “unutarak” boş yer açar. Bireyler belleklerinde tamamen farklı bilgiler ile başlasalar da, etkileşimler sonunda bireylerin bellek içerikleri birbirine yaklaşmaktadır.

SRM modelinde tavsiyeyi veren ve alan  $N$  kişi arasından rasgele seçilir. Veren kendi belleğindeki  $M$  nesne arasından rasgele bir şeyi önerir. Alan belleğindeki  $M$  nesne arasından rasgele seçilene unutup, yerine tavsiye edileni alır. Burada birey sayısı  $N$ , bireylerin bellek büyüklüğü herkes için aynı ve  $M$ 'dir. Her ne kadar bireylerin bellekleri herhangi bir nesne kümesinden elemanları tutabilecek olsa da, modelin bu en basit halinde bireylerin belleklerinde diğer bireylerin olduğu varsayılır. Bu durumda birey  $a$ 'nın belleğinde birey  $b$  yer alır. Bu birey  $a$ 'nın birey  $b$ 'yi ‘biliyor’ olması şeklinde yorumlanır.

Şekil 1’de görüldüğü gibi tavsiye mekanizmasında dört birey rol alır. Tavsiye veren (“giver”) ve alan (“taker”),  $g$  ve  $t$  ile gösterilir. Tavsiye veren kendi bildikleri, yani belleğinde yer alanlar, arasında bir bireyi tavsiye eder. Tavsiye edilen (“recommended”)  $r$  ile gösterilir. Tavsiyeyi alan tavsiye edileni belleğinde bir yere koyması, böylece öğrenmesi, gerekir ama normalde belleğinde boş yer yoktur. Bu nedenle bildiği bir bireyden vaz geçip, onun yerine tavsiye edileni koyması gerekir. Yer açmak için *unutulan* (“forgotten”)  $f$  ile gösterilir. Tavsiye mekanizması bu hali ile dört seçim gerektirir ve bu seçimler rastgele yapılmaktadır.



Şekil 2: Simülasyona ait olasılık ağaç diyagramı

Sistemin durumu her bir bireyin bellek durumlarının birleşkesidir ve Şekil 1’de görüldüğü gibi bir  $N \times M$  matrisi ile gösterilebilir. Bir tavsiye işlemi sonunda sadece tavsiye alanın bellek yapısı değişir. Dolayısıyla sistemin toplam durumunda sadece tavsiye alana karşılık gelen  $t$ . satırı değişir. Bu değişimler ile sistem bir durumdan bir başka duruma gider. Ama bu değişim süreci sonsuza kadar bu şekilde devam etmez. Sistemin bir kere girdiğinde bir daha çıkmadığı “yutucu” durumlar vardır. Örneğin sistem durum matrisinin tüm satırları aynı ise artık sistemde bir değişim olamaz. Çünkü herkes aynı bireyleri biliyor, dolayısıyla yeni bir bireyin tavsiye edilmesi mümkün olamaz. Doğal olarak böyle durumlara düşmek çok küçük olasılıktır ama yeter derecede beklenildiğinde, bir başka deyişle zaman limit olarak sonuza gittiğinde sistem mutlaka bu şekildeki durumlardan birine düşecektir. Pratik olarak bu kadar bekleyemeyeceğimize göre biz ‘yeter’ derecede uzun bir süre sonunda durmamız ve o noktada sistemin durumunu incelememiz gerekir.

### III. REKLAM ETKİSİ

Reklam edilen tek bir nesne olduğunu ve reklamın toplumdaki herkese her an ulaşabildiğini varsayıyoruz. Reklam etkisini ölçen yeni modelde, ilaveten bir de *reklamı yapılan* (advertised  $a$ ) beşinci taraf vardır. En önemli parametrelerden biri reklamın  $t$  tarafından kabul görme olasılığını yansıtan  $p$ ’dir. Buna göre bir birey tavsiye almak için bir başka bireye başvurduğunda,  $1 - p$  olasılıkla tavsiyeyi,  $p$  olasılıkla ise reklamı tercih edecektir.  $p$  reklamın başarılı olma ihtimalidir.  $p$ ’yi reklama yapılan yatırım olarak da düşünebiliriz. Modelimiz yinelenmeli bir yapıdadır ve bir iterasyon şu üç adımdan oluşur:

1.  $g$ ,  $r$ ’yi tavsiye eder.

2.  $t$ ,  $p$  olasılıkla  $r$ ’yi,  $1 - p$  olasılıkla  $a$ ’yı öğrenir.

3.  $t$ ,  $f$ ’yi unuttur.

Her iterasyonda tavsiye alan  $t$ , tavsiye veren  $g$  ile rastgele eşleşir.  $g$  gene tavsiye edileni belleğinden rastgele seçer fakat,  $t$ ’nin bu sefer orjinal modelden farklı olarak  $p$  olasılıkla reklam edileni ya da  $(1 - p)$  olasılıkla  $g$  tarafından tavsiye edileni seçme hakkı vardır.  $t$ ’in kararına  $\alpha$  dersek,

$$\alpha = \begin{cases} a, & p \text{ olasılıkla} \\ r, & (1 - p) \text{ olasılıkla} \end{cases}$$

şeklinde  $\alpha$ ’nın değeri seçilir.

### IV. ANALİTİK ÇÖZÜMLEME

Epidemik hastalıkların yayılımını modelleyen, davranış tahmini ve kontrol imkanı sağlayan disipline matematiksel epidemiyoloji denir [4, 9]. Bu bölümde matematiksel epidemiyolojiden az da olsa faydalanacağız. Çünkü biliyoruz ki, fikirler de hastalıklar gibi bir kişiden diğerine geçer. Epidemiyolojide bilinen modellerden biri sağlam-enfektif-sağlam (SIS) modelidir. Reklamı bir virüs gibi düşünerek, reklam aracılığı ile empoze edilmek istenen fikri kabul etmiş bireylere *enfektif* ve reklamdaki haberi olmayan bireylere *sağlam* diyeceğiz. *Enfektif* birey sadece reklamı benimsemekle kalmaz aynı zamanda diğer *sağlam* bireylere de benimsetmek ister.

Şekil 2’deki olasılık ağacı diyagramında her seviye simülasyona ait bir iterasyondaki sıralı adımları göstermektedir. Amacımız, toplumda  $i$  kadar enfektif birey olduğunu varsayarak tek bir iterasyondaki etkileşim neticesinde, enfektif birey sayısının nasıl değişeceğini incelemektir. Her dalın üzerinde ilgili olasılık değerlerini görmekteyiz.

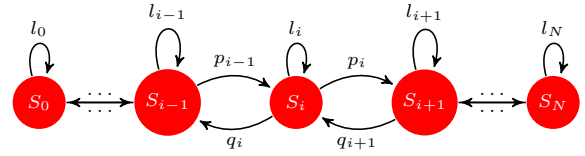
1. İlk seviye, tavsiye edenin reklamı bilip bilmemesine göre iki dala ayrılır.  $a \in g$  tavsiye verenin reklamı bildiği yani enfektif olduğu anlamına gelir. Seçtiğimiz  $g$ 'nin enfektif olma olasılığı  $\mathbb{P}(a \in g) = \frac{i}{N}$ 'dir ve  $g$ 'nin sağlam olma olasılığı ise  $\mathbb{P}(a \notin g) = \frac{N-i}{N}$ 'dir.
2. İkinci seviyede tavsiye alanın yani  $t$ 'nin enfektif olup olmamasına göre iki dala ayrılır. Bu adım bir koşullu olasılığa tekabül eder, örneğin enfektif  $g$  seçilmişken enfektif  $t$ 'nin seçilme olasılığı  $\mathbb{P}(a \in t | a \in g) = \frac{i-1}{N-1}$ 'dir. Enfektif  $g$  hafızasından rastgele birini önereceğine göre, önerdiği kişinin reklam olma olasılığı  $\frac{1}{M}$ 'dir.
3. Üçüncü seviye de, tavsiye edilenin reklam olup olmamasına göre iki dala ayrılır. Tavsiye edilenin reklam olması şu şekilde gösterilir:  $r = a$ . Sağlam  $g$ 'nin reklamı tavsiye etme ihtimali olmadığı için bir dallanma olmaz ve sadece  $r \neq a$ 'yı görürüz.
4. Bundan sonraki dördüncü seviye ise  $t$ 'nin,  $g$ 'den gelen tavsiyeyi mi yoksa reklam edileni mi alacağına göre ikiye ayrılır.  $t$ 'nin öğrenmek için seçtiği nesneye  $\alpha$  dersek,  $p$  olasılıkla  $\alpha = a$  ve  $1 - p$  olasılıkla  $\alpha = r$  olduğunu belirtmiştik.
5. Beşinci seviye tavsiye süreci açısından kritiktir.  $g$ 'nin önerdiği  $r$ 'yi, taker'ın zaten biliyor olma olasılığına  $\gamma$  dersek,  $\gamma$  ihtimalle  $t$  yeni bir şey öğrenmeyeceği için tavsiye geçersiz olacaktır.  $\gamma$ 'nın tam değerini hesaplamak, bazı özel durumlar haricinde, mümkün değildir. Dolayısıyla yaklaşık değerler kullanacağız.
6. Son seviye unutulmanın seçimiyle ilgilidir. Eğer  $a \in t$  ise tavsiye alan  $t$  enfektiftir ve  $\frac{1}{M}$  ihtimalle  $a$ 'yı unutabilir. Böyle olursa,  $t$  sağlam bireye dönüşür.

### A. Markov Süreci İlişkisi

Olasılık ağaç diyagramının yapıları bizim için kilit öneme sahiptir. Toplumda  $i$  adet enfektif birey olduğu durumu  $S_i$  ile gösterirsek, olasılık ağaç diyagramının *artı* [+] yapıları bize  $S_i$ 'den  $S_{i+1}$ 'e geçiş olasılığını verir. Benzer şekilde, *eksi*, toplumdaki enfektif birey sayısının, [-] bir azaldığını, *nokta* [.] ise değişmediğini gösterir. Geçiş olasılıklarını belirtmek için şu notasyonu kullanalım.

$$\begin{aligned} q_i &= \mathbb{P}(S_i \rightarrow S_{i-1}) \\ l_i &= \mathbb{P}(S_i \rightarrow S_i) \\ p_i &= \mathbb{P}(S_i \rightarrow S_{i+1}) \end{aligned}$$

Problemi bu hale getirdikten sonra fark edeceğimiz önemli şeylerden ilki, her  $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$  için  $q_i$ ,  $l_i$  ve  $p_i$  farklı değerler olsa da, olasılık ağaç diyagramının tüm dallarının olasılık değerlerinin toplamının 1 olduğudur,  $q_i + l_i + p_i = 1$ 'dir. Şekil 2'deki her yaprağa giden



Şekil 3: Rassal Yürüyüş ilişkisi: Bizim modelimiz, bir çeşit random walk olarak düşünülebilir. Enfektif kişi sayısı ekşiye düşemeyeceği için  $S_0$ 'dan sola gidiş olasılığı sıfırdır. Dolayısıyla, başlangıç durumu  $S_0$  bir yansıtıcı durumdur.  $M = 1$ 'ken  $S_N$  yutucu duruma tekabül eder,  $M > 1$ 'ken ise  $S_N$  sadece bir yansıtıcı durumdur.

yol üzerindeki dalların olasılık değerlerini çarparak, o yaprağın gerçekleşme ihtimalini elde ederiz. Aynı tür yapılar için olasılık çarpımlarını toplayarak durum geçiş olasılıklarını hesaplarız. Buna göre,

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{N-i}{N} \cdot \frac{N-i-1}{N-1} \cdot p \\ &+ \frac{i}{N} \cdot \frac{N-i}{N-1} \cdot \left( \frac{1}{M} + \frac{M-1}{M} \cdot p \right) \\ q_i &= \frac{N-i}{N} \cdot \frac{i}{N-1} \cdot (1-p)(1-\gamma) \cdot \frac{1}{M} \\ &+ \frac{i}{N} \cdot \frac{i-1}{N-1} \cdot \frac{M-1}{M} \cdot (1-p)(1-\gamma) \cdot \frac{1}{M} \\ l_i &= 1 - (q_i + p_i) \end{aligned}$$

Analitik çözümlene yapabilmek için, öncelikle stokastik markov matrisimizi oluşturacağız ve bilinen doğrusal cebir özelliklerinden faydalanacağız. Markov matrisi yardımıyla bir durumdan diğerine geçiş olasılıklarını inceleyelim. Matrisimizin boyuları  $(N+1) \times (N+1)$ 'dir.  $N = 5$  için matrisimizin görüntüsü,

$$\Theta = \begin{bmatrix} l_0 & q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_0 & l_1 & q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & l_2 & q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & l_3 & q_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & l_4 & q_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & l_5 \end{bmatrix}$$

$\Theta$  sütun toplamı 1 olan stokastik bir matristir ve doğrusal cebirden biliyoruz ki  $\Theta$  ve  $\Theta^T$  aynı özdeğerlere sahiptir. Kolayca görülür ki,  $\Theta^T$ 'un özvektörü  $v = [1, \dots, 1]^T$  için ilgili özdeğeri  $\lambda = 1$ 'dir. Dolayısıyla  $\lambda = 1$  aynı zamanda  $\Theta$ 'in de bir özdeğeridir fakat ilgili özvektörü  $v$ 'den farklıdır. Bu özvektöre  $\pi$  dersek,

$$\pi = \Theta \pi$$

$\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N]^T$ ,  $(N+1) \times 1$  sütun vektörüdür.  $\pi_i$ , enfektif kişi sayısının  $i$  olma ihtimali, olmak üzere  $\pi$  bir denge durumu olasılık dağılımı (stationary distribution) olarak yorumlanabilir.  $\pi = \Theta \pi$  olduğuna göre kararlı haldeki olasılık dağılımının denklemi  $\forall i$  için şu şekilde yazılacaktır:  $\pi_i = p_{i-1} \pi_{i-1} + l_i \pi_i + q_{i+1} \pi_{i+1}$ . Toplumdaki enfektif kişi sayısı negatif ya da  $N$ 'den büyük olamayacağı için  $q_0$  ve  $p_N$  olasılıkları sıfırdır. Ayrıca

$q_i + l_i + p_i = 1$  olduğuna göre, kolayca görülür ki,

$$\pi_i = \frac{p_{i-1}}{q_i} \pi_{i-1}$$

Denge durumu olasılık dağılımı yeterince sayıda iterasyon gerçekleştiğinde ortaya çıkacak olan dağılımdır. Burda  $\pi_i$ , bize enfektif birey sayısının  $i$  olma ihtimalini verir. Bu kararlı hale ait denge durumu olasılık dağılımı şu özelliklere sahiptir [8].

- $\pi_i = \prod_{k=1}^i \frac{p_{k-1}}{q_k} \pi_0$
- $\sum_{i=0}^N \pi_i = 1$

Bu dağılımın beklenen değeri bize, rassal yürüyüş modelinde yürüyüşün hangi durum üzerinde yoğunlaştığını söyler. O durumun indisi bize toplumdaki enfektif kişi sayısını verir. Dolayısıyla dağılımın beklenen değeri, uzun vadede reklamın kaç kişi tarafından bilindiğine dair tahminimizi ortaya koyar. Reklamın beklenen şöhreti şu matematiksel ifade ile elde edilir:

$$E[\pi] = \sum_{i=0}^N i \times \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^N i \prod_{k=1}^i \frac{p_{k-1}}{q_k}$$

## V. SİMÜLASYON SONUÇLARI

Reklamın şöhret oluşumuna etkisini incelediğimiz bu çalışmada toplumun  $N = 100$  kişiden oluştuğunu ve  $A$  adet reklamı yapılan nesne olduğunu varsaydık. Yorumlamada kolaylık olması açısından  $A = 1$  kabul ettik. Kişi başı ortalama iterasyon sayısını  $v = 10^6$  kabul ettik. Bunun anlamı bir simülasyon için toplamda  $v \times N$  iterasyon gerçekleştirilecek olmasıdır. Stokastik bir model üzerinde çalıştığımız için, sonuçları 20 simülasyonun ortalaması olacak şekilde belirttik.

Şekil 4 (a)'da  $X$  eksenini bellek kapasitesinin büyüklüğünü,  $Y$  eksenini reklamın şöhretinin buna bağlı olarak değişimini göstermektedir. Reklamı bilen kişi sayısının toplumdaki kişi sayısına oranı bize reklamın şöhretini vermektedir. Gerçek hayatta, bir insanın takip edemeyeceği kadar web hizmeti, kültürel ürün vs.. vardır. Dolayısıyla, bellek büyüklüğünün tüm nesnelere bilecek kadar büyük olabileceğini varsaymak doğru bir yaklaşım sayılmaz. Şekil 4 (a)'da dört farklı reklam yatırımını simgeleyen  $p \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}$  değerleri için, hafızanın kısıtlı olduğu 1 ile 25 aralığında, reklam şöhretinin nasıl değiştiğini gözlemlemekteyiz.

Modelimizdeki  $p$  parametresi, tavsiye yerine reklamın başarılı olma ihtimalidir ve  $p$ 'yi reklam için yapılan yatırım olarak da düşünebiliriz. Simülasyonlar sonucunda görüyoruz ki, reklam yatırımı, yani  $p$ 'nin değeri ne kadar büyükse reklam edilenin şöhreti de o kadar artış göstermektedir. Bu beklenen bir sonuçtur. Asıl şaşırtıcı olan sonuç, hafıza büyüklüğünün minimum

olduğu değer için reklam edilenin şöhretinin maksimum değere ulaşmasıdır.

Görüldüğü üzere Şekil 4 (a)'da her  $p$  değeri için  $M = 1$ 'ken reklam edilenin şöhreti 1'dir. Diğer bir ifadeyle, reklam yüzde yüz başarıya ulaşmış ve toplumdaki herkes tarafından kabul görmüştür. Üstelik bu bulgu her  $p$  değeri için gerçekleştiğine göre bu  $p$ 'den yani reklamın tanıtımı için yapılan yatırımdan bağımsızdır. Bu da demek olur ki,  $M = 1$ 'ken ciddi yatırım harcamasına gereksinim yoktur. Az bir reklam kampanyası dahi mutlak başarıya ulaşacaktır. Bu durumun analitik olarak bir sonraki bölümde inceleyeceğiz. Fakat öncelikle Bölüm IV'da tam değerini belirtmediğimiz  $\gamma$  üzerinde duralım.

### A. $\gamma$ 'nın değeri.

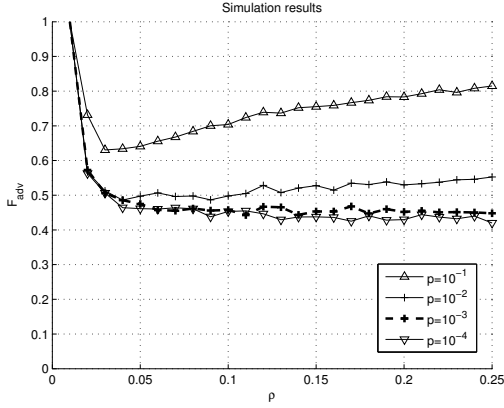
Tavsiye edilenin, tavsiyeyi alan tarafından önceden zaten biliniyor olma ihtimalini  $\gamma$  olarak tanımladık. Fakat  $\gamma$ 'nın değerini belirtmedik. Bilinen o ki,  $\gamma$ 'nın değeri, başlangıçta sıfırdan büyük veya eşittir, sistem yutucu duruma ulaştığında ise  $\gamma, 1$ 'e eşittir. Öncelikle  $\gamma$ 'nın değerini göz ardı etmenin zaten gerçekçi olmayacağını belirtmekte fayda var. Çünkü etkileşimler neticesinde illa ki, tavsiye alan ve tavsiye verenlerin bildikleri arasında ortaklıklar oluşacaktır. Tavsiye verenin bu ortak bilinenlerden birini önermesi geçersiz tavsiye ile sonuçlanacaktır.  $\gamma$ 'nın değerinin iterasyon sayısına bağlı olarak nasıl değiştiğinin saptanması, belli bazı özel durumlar haricinde, neredeyse imkansızdır. Belki bu başka bir çalışmanın konusu olabilir. Bu nedenle, olabilecek yaklaşımlardan biri basitlik açısından  $\gamma = 0.5$  olarak kabul etmektir. Bir diğeri ise, simülasyon verilerinden yararlanmaktır.

Tavsiye edilen  $N$  adet nesneden biridir. Onun tavsiye alanın bildiği  $M$  nesneden biri olma ihtimali  $\gamma = \frac{M}{N}$ 'dir. Fakat bu yaklaşımla, tamamen unutulmuş nesnelere göz ardı etmiş oluruz. Daha iyi bir yaklaşım,  $U$  sistem tarafından unutulmamış nesne sayısı olmak üzere,  $\gamma$ 'yı  $\frac{M}{U}$  olarak kabul etmektir. Unutulmamış nesne sayısı için, simülasyon loglarını, ortalama olarak kullanabiliriz.

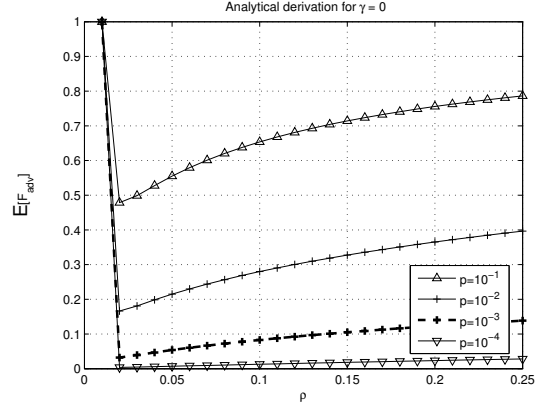
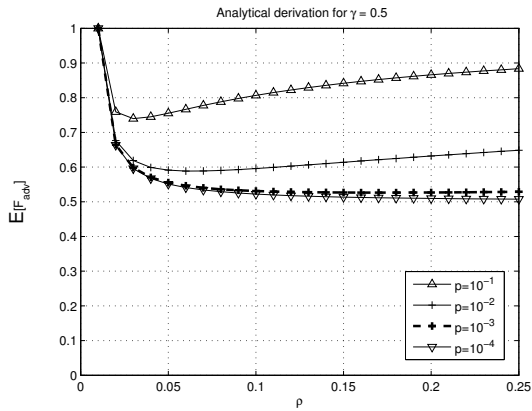
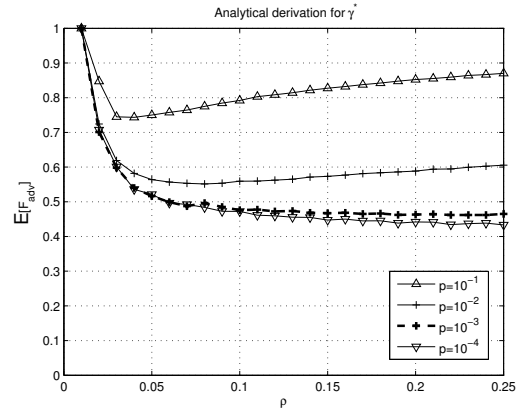
$$\gamma^* = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{M}{U_i}$$

Burda,  $U_i$   $i$ 'inci simülasyondaki unutulmamış nesne sayısını vermektedir.  $R = 20$  ise ortalaması alınan birbirinden farklı simülasyon sayısını vermektedir.

Şekil 4'de  $\gamma = 0$  için, analitik çözümlememiz, simülasyon sonuçlarıyla yeterince iyi örtüşmemektedir. Bunun sebebi, özellikle hafızanın küçük olduğu durumda sistemce bilinen ortak nesnelere sayısını  $\gamma = 0$  için iyi yansıtamamasıdır. Basitçe  $\gamma = 0.5$  kabul ettiğimizde analitik çözümlememiz, simülasyon sonuçları ile daha iyi örtüşmektedir. Çalışmamız, hem teorik açıdan hem de pratik açıdan en iyi  $\gamma^*$  için doğrulanmıştır.



(a) Simülasyon sonucu

(b)  $\gamma = 0$  için analitik yaklaşım sonucu(c)  $\gamma = 0.5$  için analitik yaklaşım sonucu(d)  $\gamma^*$  için analitik yaklaşım sonucu

Şekil 4: Kabul edilebilir hafıza oranları için, reklam edilenin şöhretinin nasıl değiştiğini anlatan simülasyon sonuçları, analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Markov zinciri ile yapılan teorik yaklaşım, simülasyon sonuçlarını  $\gamma = 0$  haricinde doğrulamaktadır.

## B. Reklam yatırımından bağımsız başarı

$M = 1$  için reklam yatırımından bağımsız başarı bir başarı elde edilmektedir. Bunun için, daha önce bulduğumuz  $q_i$ ,  $l_i$  ve  $p_i$  geçiş olasılıklarını hafıza büyüklüğünün bir olduğu,  $M = 1$  özel durumuna bakalım.

$$p_i = \frac{i}{N} \cdot \frac{N-i}{N-1} + \frac{N-i}{N} \cdot \frac{N-i-1}{N-1} \cdot p$$

$$q_i = \frac{N-i}{N} \cdot \frac{i}{N-1} \cdot (1-p)(1-\gamma)$$

$q_i$ 'in bu değeri,  $M = 1$ 'iken, olasılık ağaç diyagramında  $a \notin g$  ve  $a \in t$  durumunda elde edildiğine göre,  $\gamma = 0$  olmak zorundadır. (Hafıza büyüklüğü 1'ken  $t$ ,  $a$ 'yı biliyor ve  $g$  bilmiyor.)  $M = 1$  iken, görüyoruz ki,

(1) Her  $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$  için  $p_i > q_i$  eşitsizliği

sağlanmaktadır.

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{i + (N-i-1)p}{i(1-p)} = 1 + \frac{N-1}{i} \cdot \frac{p}{1-p} > 1$$

(2)  $p_N = 0$ ,  $q_N = 0$  dolayısıyla  $l_N = 1$

Bu iki gözlemimizin ikisi de,  $M = 1$ 'ken neden  $p$ 'den bağımsız olarak reklamın toplumdaki tüm bireyler tarafından bilinir hale geldiğini açıklar. İlk gözlemimizin anlamı, Şekil 3'de sistem hangi durumda olursa olsun, sağa doğru yani  $S_N$ 'e doğru ölenemez bir gidiş eğiliminin olduğudur. İkinci gözlemimiz ise,  $M = 1$ 'ken  $l_N = 1$  olduğu için,  $S_N$ 'in yutucu durum olması ile ilgilidir.  $S_N$  toplumdaki herkesin enfektif hale geçmesi yani reklam edilenin tüm toplum tarafından benimsenmesi anlamına gelir. Bu da reklamın yüzde yüz başarıya ulaşması demektir.

## VI. SONUÇ

Simülasyon sonucunda elde ettiğimiz dikkat çekici iki önemli bulgudan ilki, bireylerin bellek büyüklüğü olabilecek en küçük değer olan  $M = 1$  iken, reklamın yüzde yüz başarılı oluşudur ve bu reklamın  $p$  gücünden bağımsız olarak gerçekleşmektedir. Yani toplum hafızasının en küçük olduğu bu durumda reklam için ne kadar yatırım yaptığımızdan bağımsız olarak reklam tam başarıya ulaşacaktır.

İkinci önemli bulgumuz ise, bellek büyüklüğünün daha büyük olduğu ( $M > 1$ ) toplumlarla ilgilidir. Burada, belli bir kritik  $p$  değerinin varlığını gözlemlemekteyiz. Bu kritik değerden düşük bir reklam yatırımda, reklam başarısının bellek büyüklüğü ile ters orantılı olduğu ortaya çıkmıştır. Kritik değer üstünde bir reklam yatırımda ise reklam başarısının bellek büyüklüğü ile doğru orantılı olduğu ortaya çıkmıştır. Diğer bir ifadeyle, kritik değer altındayken hafıza arttıkça reklam edilenin bilinirliği azalırken, bu değer üstündeyken hafıza arttıkça reklam edilenin bilinirliği de artar.

Ayrıca bu çalışmamızda, simülasyonu gerçekleştirmeden sonucun ne olacağını kestirecek analitik bir çözümleme de yaptık. Bu tavsiye modelini bir Markov süreci haline getirerek ilgili olasılık dağılımını hesapladık. Bu dağılımın beklenen değeri bize reklam edilenin şöhretini vermektedir. Bu da tavsiye modelinin ilgili parametrelerle birlikte kontrolünü kolaylaştırmakta ve reklamın şöhret oluşumuna olan etkisinin ne olacağı ile ilgili tahminlerde bulunmaya imkan sağlamaktadır.

## A. İleriye dönük çalışmalar

Kimin tavsiye edeceği, kime tavsiye edeceği kadar neyi tavsiye edeceği de önemlidir. Modelin, Physical Review E’de yayınlanan en basit halinde (Simple Recommendation Model - SRM) bu seçimler rasgele yapılmaktadır.

Biliyoruz ki gerçek hayatta tavsiyelerimizi bildiklerimiz arasından rasgele yapmıyoruz. Bize gelen tavsiyeleri rasgele almıyoruz. Daha başka mekanizmalar devreye giriyor. Her tavsiye edileni kabul etmiyoruz. Tavsiye edenin o konuda ne kadar güvenilir, ne kadar yetkin olduğuna bakıyoruz. PRE modelinde birey tavsiye edileni tavsiye edene ve tavsiye edilene bakmaksızın kabul eder. Buralarda daha ince mekanizmalara gereksinim olacaktır.

SRM modeli bireylerin hepsinin aynı büyüklükte belleğe sahip olduğunu varsayar. Herkes m kadar şey bilebilir. SRM’de toplum büyüklüğü sabittir. Bireyler doğmaz, ölmez. Gerçek hayatta bunun böyle değildir.

Bir başka incelenen nokta göç olgusunun karşılığıdır. Birbiri ile etkileşmeyen iki toplum aradaki engellerin kaldırılması ile etkileşir hale gelirse ne olacağını incelemesidir. Bu bir anlamda birbiri ile bağlantısı olmayan iki sosyal ağın yeni bir bağ ile artık etkileşir olması olarak da düşünülebilir.

**Teşekkürler.** Bu çalışma, Boğaziçi Üniversitesi Araştırma Fonu BAP-2008-08A105, DPT kaynaklı TAM Projesi, 2007K120610, ve COST aksiyonu MP0801 tarafından kısmen desteklenmiştir.

- 
- [1] Frank M. Bass. A New Product Growth for Model Consumer Durables. *Management Science*, 15(5):215–227, 1969.
- [2] Haluk Bingol. Fame emerges as a result of small memory. *Physical Review E*, 77(3):7, March 2008.
- [3] P S Dodds and D J Watts. A generalized model of social and biological contagion. *Journal of theoretical biology*, 232(4):587–604, February 2005.
- [4] David Easley and Jon Kleinberg. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning About a Highly Connected World*. Cambridge University Press, 2010.
- [5] Malcolm Gladwell. The tipping point: How little things can make a big difference. *Little Brown and Company, Boston*, 2000.
- [6] Jacob Goldenberg, B Libai, and E Muller. Talk of the network: A complex systems look at the underlying process of word-of-mouth. *Marketing letters*, 12(3):211–223, 2001.
- [7] Amaç Herdagdelen and Haluk Bingol. A Cultural Market Model. *International Journal of Modern Physics C*, 19(02):271, 2008.
- [8] J. R. Norris. *Markov Chains*. Cambridge University Press, 1998.
- [9] Martin Nowak. *Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life*. Belknap Press, 2006.
- [10] Romualdo Pastor-Satorras and Alessandro Vespignani. Epidemic Spreading in Scale-Free Networks. *Physical Review Letters*, 86(14):3200–3203, April 2001.
- [11] Everett M. Rogers and Everett Rogers. *Diffusion of Innovations*. Free Press, 5 edition, 2003.