CDMA Sistemleri için Yeni Mükemmel Dizi Örnekleri

Sibel Kurt, Oğuz Yayla

Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, Ankara

sibelk09@hacettepe.edu.tr, oguz.yayla@hacettepe.edu.tr

Özet: Mobil iletişimde oldukça popüler olan kod bölmeli çoklu erişim (code division multiple access-CDMA) sisteminde her kullanıcı sinyallerini iletmek için farklı diziler kullanır. Bu dizilerin seçimi CDMA sistemlerinin performansı için çok önemlidir. İlgili kullanıcının sinyali ile diğer kullanıcıların sinyalleri arasında iyi bir ayrım olduğunda en iyi performansa ulaşılır. Sinyaller arasındaki ayrım alınan sinyalin ilgili kullanıcının yerel olarak ürettiği dizi ile korelasyonuyla belirlenir. Eğer sinyal ilgili kullanıcın dizisi ile eşleşirse korelasyon fonksiyonu yüksek olacaktır ve sistem sinyali ayıklayacaktır. Eğer ilgili kullanıcının kodu sinyal ile ortak bir yapıya sahip değilse korelasyon sıfıra oldukça yakın olacaktır. Bu ise sinyalin olmaması demektir. Bu doğrulama işlemine çapraz korelasyon denir. Diğer taraftan, sinyal ile ilişkilendirilmiş dizinin herhangi bir zamanda sıfırdan farklı bir konumuyla korelasyonu sıfıra oldukça yakın olmalıdır. Buna oto-korelasyon denir. Bu çoklu yol çakışmalarını engellemek için kullanılır. Otokorelasyonu iyi dizilere mükemmel diziler denir. Mükemmel dizi tanımı bu uygulamadan doğmuştur. Dizileri günümüzde birçok teknolojinin içinde görebiliriz. Bu çalışmada temel amaç dizilerin analizini matematiksel yeni yöntemlerle yapılması ve bu analiz sonucunda elde edilecek bilgilerle bu dizilerin sinyallerin korelasyonu alanına uygulamaktır. Winterhof-Yayla-Ziegler (2014) çalışmasında tam sayı bir γ değeri için γ-mükemmel diziler γ-Hadamard matrisler ile analiz edilmiştir. Bu farklı ve yeni analiz yöntemi, bu çalışma kapsamında γ-Hadamard matris analizinin çalışılması için bir nedendir. Bu çalışmada tam sayı olmayan γ değerleri için γ-Hadamard matrisleri sunulmuştur. Bu γ-Hadamard matrisleri sinyallerin korelasyonu alanına yeni sonuçlar vermektedir.

Anahtar Sözcükler: diziler, mükemmel diziler, sinyal korelasyonu, CDMA, Hadamard matrisler, dizi aileleri.

Abstract:

Code division multiple access-CDMA is very popular in mobile communication. Finding sequences to modulate the signal is very important in the performance of CDMA systems. The best performance will occur when there is good separation between the signal of a desired user and the signals of other users. The separation of the signals is made by correlating the received signal with the locally generated sequence of the desired user. If the signal matches the desired user's sequence then the correlation function will be high and the system can extract that signal. If the desired user's sequence has nothing in common with the signal the correlation should be as close to zero as possible; this is referred to as cross-correlation. If the code is correlated with the signal at any time offset other than zero, the correlation should be as close to zero as possible. This is referred to as auto-correlation and is used to reject multi-path interference. Sequences with good correlation properties are defined as perfect sequences. That application is the starting point of perfect sequences in literature. Thus sequences appear in many practical technology. Main objective in this study is analysis of sequences with new mathematical methods and develop new applications on correlation of signals or to make better existing applications. γ-perfect sequences were analyzed with γ-Hadamard Matrices for an integer γ in Winterhof-Yayla-Ziegler (2016). This new analysis method is a reason why γ-Hadamard matrix analysis is included in the scope of this study. This γ-Hadamard matrix analyzes will give new results on perfect sequences. In this study, we present examples of γ-Hadamard matrices for non-integer γ values. These examples of Hadamard matrices give new application results in signal correlation.

Keywords: sequences, perfect sequences, signal correlation, CDMA, Hadamard matrices, sequence family.

1. Giriş

CDMA(Code Division Multiple Access) çeşitli radyo iletişim teknolojilerini kullanarak erişimi sağlayan bir kanaldır. Bir çok sayıda göndericinin tek bir kanal üzerinden eş zamanlı veri gönderebilmesini sağlayan çoklu erişim örneğidir. Bir çok kullanıcının, frekans bandını paylaşmasına izin verir. Her bir vericinin bir kodla giriş yaptığı CDMA teknolojisinde spread spectrum ve özel kod şemaları kullanılır [5,15].

Çoklu erişimi anlayabilmek için bir örnek verilebilir. Bir odada bir grup insanın aralarında aynı anda konuştuğunu düşünelim. Karışıklıktan kaçınmak için insanlar sırayla konuşabilir (zamanı bölme), farklı alanlarda konuşabilir (frekansı bölme) ya da farklı dillerde konuşabilir (kodu bölme). CDMA aynı dili konuşan insanların birbirini anlayabildiği fakat diğer dillerin gürültü olarak algılandığı ya da göz ardı edildiği son örneğe benzerdir. CDMA'de birbiriyle iletişim halindeki bireylerden oluşan her grubun ortak paylaşılmış bir kodu vardır. Aynı kanalda bir çok kod bulunurken, sadece aynı grupta bireyler birbiriyle iletişim kurabilir.

3G teknolojisine taban oluşturan CDMA, verileri bit bit modüle eden bir tekniktir. Veriler Walsh fonksiyonu ya da mükemmel diziler gibi ortogonal diziler tarafından modüle edilir. Aynı zamanda bu kodlar geniş bir frekans bandının üzerine yayıldığı için spread kod olarak da bilinir. Bu teknoloji genel olarak UHF(ultra high frequency) hücresel telefon sistemlerinde, 800-MHz ve 19-GHz aralığındaki bantlarda kullanılır [5], .

2. CDMA'in İşleyişi

Zaman ve frekans boyutundan farklı bir boyut düşünelim. Bu diğer boyut, kullanıcıları birbirinden ayırmamızı sağlar. kendi frekansları üzerindeki herkes eş zamanlı olarak birbiriyle konuşabilir. İşte bu farklı boyut üzerinde kullanıcıları birbirinden ayırabiliriz.

Üç alıcı ve üç verici düşünelim. Birinci alıcı birinci verici, ikinci alıcı ikinci verici ile ve üçüncü alıcı üçüncü vericiyle iletişimde bulunsun. Erişim hem aynı zaman aralığında hem de aynı frekansta sağlansın. Bu üç iletişimi birbirinden ayırmak için bağlantıları konuşurken kilitleyebilirler ve yine bu bağlantıyı, alıcı elinde kendine özgü anahtarıyla açabilir. Böylece iletişim kullanıcılar için sağlanmış olur. Vericiler sinyalleri gönderirken sahip olduğu enerjinin bir miktarını alıcıyla eşlemeye harcar. Örneğin kullanıcı1 (00) olan 2 bitlik verisini verici1'e gönderecek olsun. Bulundukları frekansa yayılacak olan ortogonal dizilerden meydana gelen spread kodları da (0101) olduğunu düşünelim. Kullanıcı1 veriyi bu kodla bit bit kodlaması gerekir:

VERİCİ1
VERİ : 00 (2 bits)
SPREADING KOD: 0101

KOD 0101 0101
VERİ 0000 0000

XOR 0101 0101
VERİCİ1 SPREAD MESAJ : 01010101
(8 CHIPS)

Sırasıyla kullanıcı2 ve kullanıcı3 ün spread kodları aşağıdaki gibi verilsin.

VERİCİ2
VERİ: 10
SPREADING KOD: 0011

KOD   0011   0011
VERİ   1111   0000

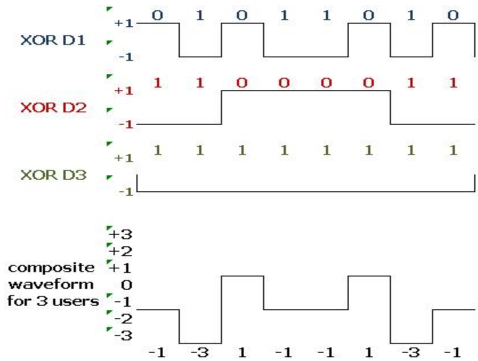
XOR   1100   0011
VERİCİ2 SPREAD MESAJ : 11000011

VERİCİ3
VERİ: 11
SPREADING KOD: 0000

KOD   0000   0000
VERİ   1111   1111

XOR   11111   1111
VERİCİ3 SPREAD MESAJ : 11111111

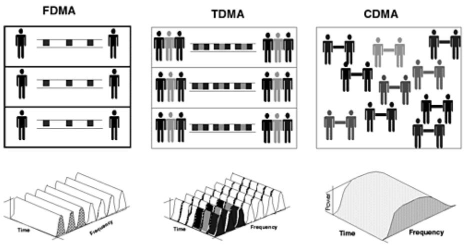
Bu 3 mesajı 0 bit 1 volta, 1 bit -1 volta tekabül edecek şekilde sinyale çevirelim. VERİCİ1 SPREAD MESAJ: (1 -1 1 -1 1 -1 1 -1), VERİCİ2 SPREAD MESAJ: (-1 -1 1 1 1 1 -1 -1), VERİCİ3 SPREAD MESAJ: (-1 -1 -1 -1 -1 -1 - 1 -1) olur. Bu 3 sinyal toplanır : (-1 -3 -1 -1 1 -1 -1 -3) olur. Gönderilen bu sinyal, tüm alıcılara gider ve her alıcı kendi mesajını bu sinyalden çeker. Alıcı 1 gelen sinyali, spread mesajı sinyale dönüştürüp bu ikisini bit bit çarpar.
(-1 -3 -1 -1 1 -1 -1 -3) X (1 -1 1 -1 1 -1 1 -1) = (-1 3 -1 1 1 1-1 3)
Elde edilen bu sıralama 4 er sembol olacak şekilde ortadan 2 ye ayrılır ve toplanır. İlk dörtlü (-1 3 -1 1) olup ; toplam -1 + 3 + (-1) +1 = 2 olur ve ikinci dörtlü (1 1 -1 3) olup; toplam 1 + 1 + (-1) + 3 = 2 olur. Sistemde pozitif sayılar 0 negatif sayılar 1 ile kodlandığından alıcı (0 0) verisine ulaşır. Bu örneği Şekil 1.'de görebiliriz. Diğer kullanıcılar da bu birleşik sinyali kendi spread sinyalleriyle çözebilirler. Kodlama ve dekodlama yaptığı için sistem bu yönüyle kriptografideki şifreleme ve şifre çözmeye benzer.



Şekil 1. CDMA sinyal üretimi

TDMA(Time Division Multiple Access) çoklu erişim için zamanı kullanıcılara göre böler. Yani kullanıcılar baz istasyonuna farklı zaman aralıklarında bağlanırlar. Aynı şekilde FDMA(Frequence Division Multiple Access) de farklı kullanıcılar erişim için farklı frekans bantlarını kullanırlar. Zaman sınırlaması yoktur. FDMA, TDMA den önce kullanılan birinci nesil kablosuz iletişim tekniğidir bkz. [5 Ünite 16]. CDMA, TDMA ve FDMA gibi çoklu erişim sağlar, ancak diğerlerinden farklı olarak, kullanıcılara farklı kodlar ayırır. Kullanıcılara farklı frekans bantları ayrılmıştır. Şekil 2.'de bu durum açıklanmaya çalışılmıştır.

Ayrıca FDMA ve TDMA sırasıyla biri frekans diğeri zaman bölmeli olduğu için bulunduğu ortamdaki baz istasyonu ile iletişime geçmek için farklı frekanslar kullanır. Yani bir frekanstan diğerine bağlanırken, bu bağlanma süresince küçük de olsa bir kesiti olur. Bu kesilmeye kesintili atlama (hard handoff) denir. ancak CDMA'de bu kesintili atlamalar sırasında hiçbir iletişim kopukluğu olmaz. Çünkü CDMA'de bağlantı kurulacak diğer bir frekans ve zamana ihtiyaç duyulmaz. CDMA spread-spectrum modülasyon formatını kullanır. Bu nedenle ses dalgaları gibi alçak frekanslı sinyallerin yüksek frekanslı taşıyıcı bir sinyal üzerine bindirilerek uzak mesafeye taşınması sağlanabilir. Bu şekilde bant daha verimli kullanılması yönünde avantaj sağlar. CDMA için direct sequence spread spectrum



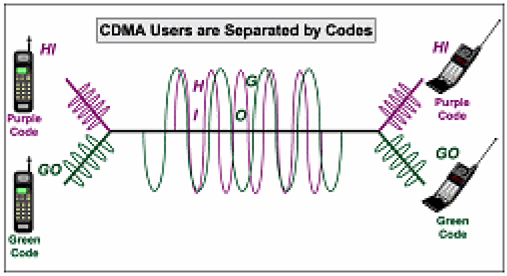
Şekil 2. FDMA,TDMA,CDMA analoji

1 ve -1 lerden oluşan pseudorandom dizilerle yukarıda da belirtildiği gibi XOR'lanan verileri içerir. Spreading kodlar, veri kodlarına göre daha hızlı değişir ve bu yüzden veri sinyalinden çok daha yüksek frekanstadır. Spreading kodlar veri sinyaline yayıldığında oluşan yeni sinyalin frekansındaki tepe noktası; veri sinyali ve spread sinyale göre daha büyük değerler aldığı için, onlara yayılan kod manasındaki bu ad verilmiştir.

CDMA'in işleyişinde her alıcıya farklı spreading kod verip bu işleyişin pürüzsüz bir şekilde çalışması kolay gibi gözükebilir. Ancak tersine spreading kod tasarlamak bir hayli karmaşık ve zorlu bir süreçtir. Çünkü bu kodlar birbirleri arasında ortogonal olmak zorundadır. Çok sayıda birbirine ortagonal koda tekabül edecek dizi bulmak epey uğraştırıcıdır [6,9,11,14]. Spreading kodların ortagonal olması, bu işleyişin düğüm noktasını oluşturur. Çünkü, bir bağlantıdaki spreading kod diğer tüm bağlantılardaki spreading kodları iptal etmelidir. Aynı zamanda diğer bağlantıdaki hiç bir spreading kodu da çekememelidir. Ortagonal spread kodların kendine has bu özelliği aranılan özelliktir [11]. Bu yüzden ortagonal olmanın bu özelliğine sahip spreading kod tasarlamak kolay bir iş değildir. Bu noktada işin içine detaylı bir matematik girer. Bu CDMA'in gerçekten neden karmaşık olduğunu açıklar. CDMA'in bu karmaşık yapısı, Qualcomm'a (CDMA fikrinin patentini alan amerikan firması) oldukça cazip gelmiştir.

Bu sistemin bir çok avantajı vardır. Örneğin; frekans kararlılığı 1 dir. Frekans kararlılığı, bizim kullanmak zorunda olduğumuz bantların sayısıdır. Tüm kullanıcılar tek bir frekans üzerinden iletişim sağladığından frekansları herhangi bir şekilde bölmeye gerek kalmaz. Bu yüzden frekans yoğunluğu 1'e eşit olacaktır. Özellikle frekans duyarlılığı bakımından bu durum açık şekilde istenendir. Qualcomm'un CDMA sistemini çok önemsemesine rağmen o tarihlerde bir çok mühendis kod bazlı kablosuz iletişim fikrini reddettiler. CDMA sistemine geçmek, TDMA tipinden daha sezgisel olan köklü bir değişiklik olacaktı. İkinci olarak; Qualcomm o sıralarda CDMA ve tüm yenilik ve gelişmelerini geniş bir ölçekte gösterememişti. Bu gibi nedenlerle, 1989 yılında CTI, ABD'nin 2G dijital standartı olarak CDMA yerine TDMA'yi onayladı.

Üstte de adı geçtiği gibi, CDMA ortogonal kodlar kullanır. Bu kodlar birçok kullanıcıya eş zamanlı olarak kanala erişimi sağlar. CDMA'in avantajı, sistemde kullanıcılar giderek artsa bile erişimin sağlanabilmesidir. Diğer çoklu erişim sağlama teknikleriyle karşılaştırıldığında FDMA ve TDMA, kullanıcılar özel bir frekansta ya da belirli bir zaman diliminde sisteme giriş yapabilirler. Bu sınırlılıklar sistemin etkililiğini oldukça düşürür. FDMA ve TDMA kullanıcı sayısının artışına bağlı dezavantajları vardır. Çünkü belli bir noktadan sonra daha fazla bölme yapmanın hiç bir yolu yoktur. Öte yandan CDMA kullanıcılar eklendikçe onların hepsini sistemde tutmaya devam eder. Bu durum Şekil 3.'te örneklendirilmiştir. CDMA in sınırlılığı ise hata oranıdır. Eklenen her kullanıcıyla birlikte bu oran artar.



Şekil 3. CDMA kullanıcıları

Her kullanıcı, pseudo-random noise (PN) başka bir deyişle ortagonal diziye sahiptir.

Bunların çapraz-korelasyonları sıfıra yakın veya eşittir. Kodların ortagonalliği, her bir sinyalin alıcı ve verici çiftlerinin birbirine karşılık gelen sinyallere sahip olmasını sağlar. Ayrıca farklı kullanıcılara ait sinyaller birbirleriyle karşılaştıklarında oluşacak parazit ve gürültüyü yok ederler.

Direct sequence spread spectrumlarda iki tip spread kod vardır: uzun ve kısa. Kısa spreading-kodlarda spread sequence periyodiktir ve periyodu sistem kazancına eşittir. Aynı kısa dizi, gönderilen her bir sembolü modulize etmede kullanılır. Kısa spreading sequencelara örnek olarak Walsh kodları, Gold dizileri ve Kasami dizileri örnek gösterilebilir [12, Ünite 10.3]. Uzun spreading sequencelarda, bu spreading sequence ya aperiyodiktir ya da sistemin kazandığından daha uzun bir periyoda sahiptir. Modelimizde kullanmak için long spreading sequenceları seçeriz. Çünkü long spread sequencelar IS-95 standartlarında kullanılır. Long spreading m-dizileri maksimum length shift register kullanılarak üretilir [6]. Her bir kullanıcı diğerleriyle karşılıklı ortagoanal dizi üretmek için m-dizilerinin kaydırılmış versiyonunu kullanır.

CDMA sisteminde kullanılan spread kodlar literatürde pseudorandom noise, orthogonal dizi, Walsh dizisi, spread sequence veya mükemmel dizi isimleri ile anılmaktadır. Bizim çalışmalarımız ve yaralandığımız literatür, mükemmel dizi terimini tercih ettiği etmektedir. Biz de bu bölümden sonra spread kod yerine mükemmel dizi terimini kullanacağız. Aşağıda verilen mükemmel dizi tanımına da bakılırsa yukarıdaki 1. ve 2. bölümlerde geçen spread kod ifadesiyle örtüştüğü de görülecektir.

3. Mükemmel Diziler

a=(a_0 , a_1,...,a_{N-1},...) dizisi, girdileri $a_i \in$ C karmaşık sayıları olan ve periyodu n olacak şekilde bir dizi olsun. $1 \leq t \leq$ n-1 için, $C_a(t)$ şu şekilde tanımlanır:

$$C_a(t)=\sum_{i=0}^{n-1} a_i . \bar{a}_{i+t}$$

$\bar{a}$ ile a nın karmaşık konjugesini (eşleniğini) göstereceğiz. $1 \leq t \leq$ n-1 aralığı için $C_{\underline{a}}(t)$'nin değeri; tepe haricindeki otokorelasyon katsayıları (the out-of-phase autocorrelation coefficients) olarak adlandırılır.

p bir asal olmak üzere $\xi_p \in$ C, birimin p'ninci dereceden ilkel bir kökü olsun. Eğer bazı b_i tamsayıları ve i = 0,1,....,n için $a_i = (\xi\_p)^{b\_i}$ oluyorsa, a, p-ary dizi olarak adlandırılır. Eğer a_0 = 0 ve tüm diğer girdiler, ξ_p'nin bir kuvvetiyse, a'ya neredeyse p-ary dizi denir.

Eğer a'nın tüm tepe haricindeki otokorelasyon katsayıları 0'a eşit ise; n periyotlu, neredeyse p-ary diziler, mükemmel diziler (perfect sequence) (PS) olarak adlandırılır. Benzer olarak, eğer a'nın tüm tepe haricindeki otokorelasyon katsayıları sabit bir γ'ye eşitse, n periyotlu neredeyse p-ary dizileri neredeyse mükemmel dizi (nearly perfect sequence)(NPS) olarak adlandırılır. PS γ = 0 tipinde bir NPS'dir. Bu çalışmanın bir parçası p-ary NPS ve neredeyse p-ary NPS'yi içermektedir. $1 \leq t \leq$ n-1 aralığındaki değerler için $C_{\underline{a}}(t)$ değeri küçük olduğundaki durumlarda, n periyotlu p-ary diziler için uygulamalar vardır. Bu uygulamalardan CDMA konusunu önceki bölümlerde gösterdik. NPS birçok yazar tarafından yaygın bir şekilde çalışılmaktadır. Örneğin, Jungnickel and Pott (1999) $|\gamma| \leq 2$ tipindeki binary NPS'leri çalışmışlardır ve bu tarz NPS'lerin var olan ve olmayan durumlarını göstermişlerdir. Ma ve Ng (2014) $|\gamma|\leq 1$ tipindeki p-ary NPS'leri çalışmışlardır ve fark kümelerinin direkt çarpımını kullanarak, bu tarz dizilerin var olanlarını belirlemişlerdir. Sonrasında Ma ve Ng (2004)'nin γ =0 ve γ =-1 tipindeki p-ary NPS üzerindeki çalıştıkları metotları Chee vd (2010) genişletmişlerdir. Özbudak vd. (2012) belirli değerlerde p-ary NPS var olmadığını kanıtlamışlardır. Yakın zamanda Winterhof-Yayla-Ziegler (2016), Butson Hadamard matrislerini, belirli Diophantine denklemlerini ve ideal ayrışımlarını kullanarak m tamsayısı için m'inci dereceden NPS'lerin var olma durumlarını çalışmışlardır. Yayla (2016)'da ise herhangi bir $\gamma \in Z$ için γ tipinde (yaklaşık) p-ary (neredeyse) mükemmel dizi ile fark kümelerinin direkt çarpının genel eşitliği ispatlanmıştır. Bu sonuca göre, γ tipinde p-ary NPS'lerin varlığı için gerekli olan koşullar çalışılmıştır. Ayrıca $s \geq 1$ sıfır sembollü neredeyse p-ary NPS'nin olmadığını göstermek için, bu sonuçların genellemesi sunulmuştur.

4. Mükemmel dizilerin Hadamard matrisler ile analizi

Eğer $H\overline{H}^T = vI$ oluyorsa, girdileri m-inci dereceden birim kökün ξ_m kuvvetleri ve mertebesi v olan H kare matrisi; Butson Hadamard matrisi olarak adlandırılır ve $BH_0(v,m)$ ile gösterilir. $BH_0(v,2)$ ise v mertebeli Hadamard Matrisi olarak adlandırılır. Genelde, eğer $\gamma \epsilon R \cap Z[\xi_m]$ için $HH^T = (v-\gamma)I + \gamma J$ ise, girdileri m-inci dereceden birim kökün ξ_m kuvvetleri ve v mertebeli H kare matrisleri neredeyse Hadamard Matrisleri olarak adlandırılır ve $BH_\gamma(v,m)$ ile gösterilir. Eğer tüm $0 \leq i,j < v$ için $h_{i+1 \bmod v,\, j+1 \bmod v} = h_{i,j}$ olursa, v mertebeli $H = (h_{ij})$ kare matrisi; dairesel (circulant) olarak adlandırılır.

PS ve NPS, dairesel neredeyse Butson-Hadamard matrisleriyle belirlenebilir. $a=(a_0,a_1, \ldots ,a_{v-1},\ldots)$ dizisi m'inci dereceden v periyotlu NPS (Near Perfect Sequence) olsun. $H = (h_{i,j})$, $j = 0,1,\ldots,v-1$ için $h_{0,j} = a_j$ tarafından tanımlanan bir dairesel matris olsun. H, v mertebeli dairesel (neredeyse) Butson Hadamard matris olur.

Teorem (Winterhof-Yayla-Ziegler 2016). $t \geq 1$ *ve* $e \geq 0$ rasyonel sayılar ve q, t'yi bölmeyen rasyonel bir asal sayı olsun öyle ki

$$\mathrm{ord}_m(q) = \frac{\varphi(m)}{2}$$

ve tüm $0 \leq k \leq e-1$ tamsayıları için $\mathrm{ebob}(2e+1-2k, h_m) = 1$ olsun.
$t\,|(t)$ olacak şekilde her $t \leq Z[\xi_m]$ asal idealin, temel ideal olduğunu ve her $q\,|(q)$ özelliğine sahip, asal ideal ($q \leq Z[\xi_m]$)'nin esas olmadığı sürece;

$$\alpha\bar{\alpha} = tq^{2e+1}$$

denkleminin $Z[\xi_m]$ üzerinde çözümü olmayacaktır.

Teorem uygulandığında $BH_\gamma(v,m)$'nin hangi parametreler için olduğunu gösteren aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Sonuç (Winterhof-Yayla-Ziegler (2016)). v,m pozitif tam sayılar ve $\gamma \geq -1$ bir tamsayı olsun; öyle ki $t \geq 1$ *ve* $e \geq 0$ olmak üzere $((\gamma+1)v-\gamma)(v-\gamma)^{v-1} = tq^{2e+1}$ olsun. Burada $0 \leq k \leq e-1$ koşulunu sağlayan tüm sayılar için $\mathrm{ebob}(2e+1-2k,h_m)=1$, $\mathrm{ebob}(t,q) =1$ olacak şekilde a ve q aralarında asal ve $\mathrm{ord}_m(q) = \varphi(m)/2$ olsun. $t \leq Z[\xi_m]$ sağlayan ve $t\,|(t)$ olan her asal ideal, esas olsun ve $q\,|(q)$ olmak üzere $q \leq Z[\xi_m]$ esas olmasın. Bu durumda $BH_\gamma(v,m)$ yoktur.

Winterhof – Ziegler – Yayla (2016) çalışmasındaki mükemmel diziler üzerine sonuçlar aranırken bazı sayıların esas ve esas olmayan ideal ayrışması en basit durum olan $\varphi(m)/(\mathrm{ord}_m(q)) = 2$ için incelenmiştir.

Mükemmel dizilerin üretilmesi devirli Hadamard matris tasarımı ile de olmaktadır. Dolayısıyla devirli Hadamard matrisler için Winterhof-Ziegler-Yayla (2016) çalışmasının sunduğu analiz yöntemlerinin farklı açılardan genellenmesi ve farklı matris tasarımlarına uygulanması korelasyonu düşük mükemmel dizilerin üretilmesi ve mükemmel dizi tanımlarının farklı açılara genellenmesini sağlayacaktır. İstenilen parametreler için mükemmel dizileri üretmek zor bir problemdir, hatta var olmayabilirler (bkz, Jungnickel ve Pott (1999)), dolayısıyla genelleştirilmiş bir mükemmel dizi tanımıyla hangi parametreleri değiştirirsek mükemmel dizi bulunabilir sorusu cevap aramak mantıklı olmaktadır. Bu çerçevede Sonuç'tan farklı olarak tamsayı olmayan $|\gamma|$ değerleri için γ-Hadamard matrisleri için örnekler bu çalışmada yapılmıştır.

Tablo 1. Korelasyonu tam sayı olmayan mükemmel dizi örnekleri				
v	m	γ	$\lvert\gamma\rvert$	a
3	5	zeta_5^3 + zeta_5^2 + 1	0.61	1, 1, zeta_5^2
3	7	zeta_7^5 + zeta_7^2 + 1	0.55	zeta_7^2, zeta_7^2, 1
4	5	zeta_5^3 + zeta_5^2 + 2	0.38	1, 1, 1, zeta_5^2
4	7	zeta_7^4 + zeta_7^3 + 2	0.19	zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^5
5	5	zeta_5^3 + zeta_5^2 + 3	1.38	1, 1, 1, 1, zeta_5^2
5	7	-zeta_7^5 - zeta_7^2	0.44	zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^3, -zeta_7^5 - zeta_7^4 - zeta_7^3 - zeta_7^2 - zeta_7 - 1, zeta_7^3
6	5	zeta_5^3 + zeta_5^2 + 4	2.38	1, 1, 1, 1, 1, zeta_5^2
6	7	zeta_7^4 + zeta_7^3 + 4	2.19	zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^5
7	5	2*zeta_5^3 + 2*zeta_5^2 + 3	0.23	1, 1, 1, zeta_5^2, 1, zeta_5^2, zeta_5^2
7	7	2*zeta_7^4 + 2*zeta_7^3 + 3	0.60	zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^3, zeta_7^2, zeta_7^3, zeta_7^3
8	5	zeta_5^3 + zeta_5^2 + 1	0.61	1, 1, 1, zeta_5^2, zeta_5^3, 1, zeta_5^3, zeta_5
8	7	zeta_7^4 + zeta_7^3 + 6	4.19	zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^5
9	5	zeta_5^3 + zeta_5^2 + 7	5.38	zeta_5^2, zeta_5^2, zeta_5^2, zeta_5^2, zeta_5^2, zeta_5^2, zeta_5^2, zeta_5^2, 1
9	7	zeta_7^4 + zeta_7^3 + 7	5.19	-zeta_7^5 - zeta_7^4 - zeta_7^3 - zeta_7^2 - zeta_7 - 1, -zeta_7^5....
10	5	zeta_5^3 + zeta_5^2 + 8	6.38	zeta_5^2, zeta_5^2, zeta_5^2, zeta_5^2, zeta_5^2, zeta_5^2, zeta_5^2, zeta_5^2, zeta_5^2, 1
10	7	zeta_7^4 + zeta_7^3 + 8	6.19	zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^2, zeta_7^5

5. Yeni Mükemmel Diziler

Yeni spread kod yani mükemmel dizi örnekleri bulmak için MAGMA [22] programı kullanılmıştır. MAGMA kodlarını bir sonraki bölümde bulabilirsiniz. BH_{γ} (v,m) matrisleri 2<v<11 ve 2<m<8 arasındaki tamsayılardan hangi $\gamma \notin Z$ değerleri için var olup olmadığı üzerine arama yapılmıştır. Bu taramanın sonuçları Tablo 1'de sunulmuştur. CDMA uygulamalarında amaç $\lvert\gamma\rvert$ değerlerinin olabildiğince küçük olmasıdır. Bu yüzden Tablo 1'de en küçük $\lvert\gamma\rvert$ değeri için bulunan örnekler verilmiştir. Bu matrislerin ilk satırı Tablo 1.'de verilen a dizisi oluşmaktadır. Dolayısıyla Tablo 1.'de verilen devirli Hadamard matrislerin satırları bizim için CDMA'de kullanılacak spread kodları oluşturur.

6. Algoritma

Aşağıda verilen algoritma Magma dilinde yazılmıştır. Yukarıdaki tablo bu algoritma ile oluşturulmuştur. Tablo 1.'deki sonuçları kontrol etmek veya yeni diziler üretmek isteyenler için bu çalışmaya eklenmiştir. İstenilirse online Magma hesap makinesinde aşağıdaki kodlar çalıştırılabilir [22].

```
correlation:=function(a,n,t)
sum:=0;
for i in [1..n] do
if (i+t) gt n then ipt:= ((i+t) mod n);
else ipt:= i+t;
end if;
sum+:=(a[i]*ComplexConjugate(a[ipt]));
```

```
end for;
return sum;
end function
for n in [3..3] do
for p in [7..7] do //p_divisors_n do
ext_set:={}; ext_set_abs:={};
ext_set_im:={};
printf "\nn: %o p: %o\n",n,p;
pary:={};
unity:=RootOfUnity(p);
for i in [0..(p-1)] do
Include(~pary,unity^i);
end for;
seq_set:=CartesianPower(pary, n);
n_seq_set:=#seq_set;
p_n_seq_set:=n_seq_set div (1);
counter:=-1;
for a in seq_set do
counter+:=1;
gamma := correlation(a,n,1);
for t in [2..n-1] do
if (correlation(a,n,t) ne gamma) then break t;
end if;
if (t eq (n-1)) then
if gamma notin ext_set then
fprintf "results.txt", "\nexist: n = %o and p = %o\n
a=%o\n gamma=%o, abs_gamma=%o\n"
,n,p,a,gamma,Abs(ComplexField()!gamma);
end if;
Include(~ext_set,gamma);
Include(~ext_set_abs,Abs(ComplexField()!gamma));
end if;
end for;
if (n eq 2) then
Include(~ext_set,gamma);
Include(~ext_set_abs,Abs(ComplexField()!gamma));
end if;
end for;
printf "existence set:= %o\n", ext_set;
printf "existence set absolute value:= %o\n", ext_set_abs;
end for;
end for;
```

7. Sonuç

Bu çalışmada, öncelikle CDMA sistemi açıklanmıştır. CDMA sisteminin diğer sistemlerden farkları, avantajları ve dejavantajlarından bahsedilmiştir. CDMA iletişim sisteminde matematiksel mükemmel dizilerin nasıl kullanıldığı belirtilmiştir. Bu amaç doğrultusunda matematiksel mükemmel dizilerin Hadamard matrislerin analizi ile nasıl yapılabileceğini belirttik. Korelasyonu sıfır olan mükemmel dizilerin azlığından dolayı CDMA sistemleri için korelasyonu sıfırdan farklı mükemmel diziler literatürde mevcuttu. Ancak bu çalışmada korelasyonu tam sayı olmayan mükemmel dizilerin de CDMA gibi sistemlerde kullanılabileceği belirtilmiştir. Korelasyonu tam sayı olmayan mükemmel dizi örnekleri bu çalışmada verilmiştir.

Teşekkür

Yazarlar TÜBİTAK 116R001 nolu proje kapsamında desteklenmiştir. TÜBİTAK'a 116R001 nolu proje kapsamındaki destekleri için teşekkür ederiz.

Kaynaklar:

[1] Arasu, K. T., Yu Qing Chen, and Alexander Pott. 2001. "Hadamard and conference matrices", Journal of Algebraic Combinatorics, 14.2, 103-117.

[2] Brock, W.B. 1988. "Hermitian congruence and the existence and completion of generalized Hadamard matrices", Journal of Combinatorial Theory, Series A, 49,233-261

[3] Chee, Y. M. Tan, Y and Zhou ,Y. 2010. "Almost p-ary perfect sequences, in Sequences and their applications- SETA 2010 " , (eds. C. Carlet and A. Pott), vol. 6338 of Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, Berlin, 399-415

[4] Colbourn, C.J. and Dinitz, J.H. eds. 2006. "Handbook of combinatorial designs", CRC press, Vancouver

[5] Freeman, R. 1999. "Fundamentals of Telecommunications", John Wiley, New York, CrossRefGoogle Scholar

[6] Golomb, S.W. and Gong, G. 2005. *Signal design for good correlation: for wireless communication, cryptography, and radar*. Cambridge University Press.

[7] Horadam, K.J. 2007. “Hadamard Matrices and Their Applications”, Princeton University Press, Princeton, NJ

[8] Jungnickel, D. ve Pott,A. 1999. “Perfect and Almost Perfect Sequences”, Discrete Applied Mathematics, 95, 331-359.

[9] Lüke,H. D.,1988. "Sequences and arrays with perfect periodic correlation", IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 24, no. 3, pp. 287-294

[10] Ma S. L. and Ng W. S.. 2009. “ On non-existence of perfect and nearly perfect sequences”, Int. J. Inf. Coding Theory, 1, 15-38.

[11] Mow, W.H., 1995. “Sequence design for spread spectrum” , Chinese University Press.

[12] Mullen, G.L. and Panario, D., 2013. *Handbook of finite fields*. CRC Press.

[13] Özbudak, F. ve Yayla, O. ve Yıldırım, C.C. 2012. “Nonexistence of Certain Almost p-ary Perfect Sequences”, SETA 2012 – Sequences and Their Applications, LNCS 7280,13-24.

[14] Seberry, J., JWysocki, B., & AWysocki, T. 2005. “On some applications of Hadamard matrices”, *Metrika*, *62*(2-3), 221-239.

[15] Sung,K.W.; Ben Slimane. 2016. ” Fundamentals of Mobile Data Networks. Cambridge University Press. ISBN 1107143217

[16] Winterhof, A. ve Yayla, O. ve Ziegler, V. 2016. “Non Existence of Some Nearly Perfect Sequence, Near Butson Hadamard Matrices, and Near Conference Matrices “, arXix preprint, arXix:1407.6548, Değerlendirme aşamasında.

[17] Yayla, O. 2016. "Non-existence of nearly perfect sequences with arbitrary out-of-phase autocorrelation." Advances in Mathematics of Communications, kabul edildi

[18] http://archive.cnx.org/contents/9f65bcb0-dd2b-47c3-aa83-bc63403f8303@1/cdma-background son girilme tarihi: 10.10.2016

[19] https://www.coursera.org/learn/networks-illustrated/lecture/6AgGT/cdma son girilme tarihi: 10.10.2016

[20] https://en.wikipedia.org/wiki/Code_division_multiple_access son girilme tarihi: 10.10.2016

[21] https://www.tutorialspoint.com/cdma/cdma_technology.htm son girilme tarihi: 10.10.2016

[22] http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/ son girilme tarihi: 10.10.2016